



(مهندسی مواد - سراسری ۹۱)

مثال ۷۸: اگر $x = \cosh t$ و $t > 0$ ، آنگاه مقدار t بر حسب x کدام است؟

$$(۱) \quad t = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) \quad (۲) \quad t = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (۳) \quad t = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) \quad (۴) \quad t = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

پاسخ: گزینه «۲» طبق فرمول می‌دانیم:

و با توجه به اینکه $x = \cosh t$ ، لذا $x = \cosh^{-1} t$ می‌باشد.دقت کنید در صورتی که فرمول از خاطر شما رفته باشد و حداقل فرمول $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ در ذهنتان باشد، می‌توانید از معادله‌ی زیر مقدار t را حساب کنید:

$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \Rightarrow 2x = e^t + e^{-t} \Rightarrow e^t + \frac{1}{e^t} = 2x \Rightarrow (e^t)^2 = (2x)e^t + 1 = 0$$

که یک معادله‌ی درجه دوم بر حسب e^t می‌باشد که به راحتی مقدار t بر حسب x تعیین می‌شود.

(صنایع غذایی - سراسری ۹۰)

مثال ۷۹: مقدار عدد $\operatorname{tgh}^{-1}(\frac{1}{2})$ کدام است؟

$$(۱) \quad \ln 3 \quad (۲) \quad \ln \frac{2}{3} \quad (۳) \quad \ln \frac{3}{2} \quad (۴) \quad \ln \sqrt{3}$$

پاسخ: گزینه «۴» با فرض این که روابط قبلی را حفظ نکرده باشید، باید ابتدا تابع $\operatorname{tgh}^{-1}(x)$ را بیابیم، لذا داریم:

$$y = \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \xrightarrow{\text{X را بر حسب Y می‌یابیم و سپس جای X و Y را عوض می‌کنیم}}$$

$$\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = y \Rightarrow e^{2x}(1 - y) = y + 1 \Rightarrow e^{2x} = \frac{y+1}{1-y} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right) \Rightarrow \operatorname{tgh}^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$$

$$\operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \ln 3 = \ln 3^{\frac{1}{2}} = \ln \sqrt{3}$$

بنابراین به ازای $x = \frac{1}{2}$ خواهیم داشت:

نکته ۱۵: توابع $\sinh^{-1} x$ ، $\operatorname{tgh}^{-1} x$ ، $\cot \operatorname{tgh}^{-1} x$ و $\csc \operatorname{tgh}^{-1} x$ توابع فرد می‌باشند و توابع $\cosh^{-1} x$ و $\operatorname{sech}^{-1} x$ نه فرد و نه زوج هستند.

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی و توابع هیپربولیک

$$\sinh ix = i \sin x, \quad \sinh x = -i \sin ix, \quad \cosh ix = \cos x, \quad \cosh x = \cos ix$$

تذکره ۱۱: کلیه اتحادهای مثلثاتی با تبدیل $\sin$ به $i \sinh$ و $\cos$ به $\cosh$ ، به اتحادهای مشابه برای توابع هیپربولیک (هذلولی) تبدیل می‌شوند. دقت کنید

$$i^2 = -1 \text{ و } i = \sqrt{-1} \text{ می‌باشد که در فصل اعداد مختلط با آن آشنا خواهید شد.}$$

$$\sinh^{-1} x = -i \sin^{-1}(ix), \quad \cosh^{-1} x = \pm \cos^{-1} x, \quad \sinh^{-1}(ix) = i \sin^{-1} x, \quad \cosh^{-1}(ix) = \pm i \cos^{-1}(ix)$$

همچنین یادآوری می‌کنیم که $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ و $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

درسنامه ۵: به دست آوردن دامنه و برد توابع

همان‌طور که گفتیم، هر تابع حقیقی مانند $y = f(x)$ ماشینی است که عدد حقیقی x را به عنوان ورودی می‌گیرد و عدد حقیقی y را به عنوان خروجی تولید می‌کند. این‌که چه مقادیری از x را بتوانیم در این تابع قرار دهیم، **دامنه‌ی تابع** نام دارد و این‌که چه مقادیری به عنوان خروجی به دست می‌آیند، **برد تابع** نامیده می‌شود. تعیین دامنه و برد یک تابع حقیقی در بررسی سایر ویژگی‌های آن تابع، اهمیت زیادی دارد. در این درسنامه، نحوه‌ی تعیین دامنه و برد توابع حقیقی را به صورت کامل‌تر مطالعه می‌کنیم.

محاسبه دامنه توابع

دامنه‌ی تابع: اگر رابطه‌ی f تابع باشد $(f: A \rightarrow B)$ ، به مختص‌های اول آن (اعضای مجموعه‌ی A) دامنه‌ی f می‌گوییم و آن را معمولاً با نماد D_f نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر به مجموعه‌ی x هایی که برای آنها y وجود داشته باشد، دامنه‌ی تابع می‌گوییم.

۱- **دامنه‌ی توابع کثیرالجزءه یا خطی:** دامنه‌ی این‌گونه توابع اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ است.

۲- **دامنه‌ی توابع کسری به فرم $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$:** دامنه‌ی این‌گونه توابع به صورت زیر به دست می‌آید:

$$D_f = D_g \cap D_h - \{x \mid h(x) = 0\} = D_g \cap D_h - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

🌟 **تذکره ۱۲:** در توابع کسری گویا به فرم $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ که $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله‌ای هستند، دامنه‌ی تابع f از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$D_f = \mathbb{R} - \{x \mid h(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

📌 **مثال ۸۰:** دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 5x + 6}$ را به دست آورید.

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2, 3\}$$

👉 پاسخ:

۳- **دامنه توابع رادیکالی:** در این‌گونه توابع اگر فرجه‌ی رادیکال زوج باشد، باید عبارت زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر باشد و اگر فرجه‌ی رادیکال فرد باشد، دامنه‌ی تابع، همان دامنه‌ی عبارت زیر رادیکال خواهد بود.

(تاریخ و فلسفه علم - سراسری ۹۰)

📌 **مثال ۸۱:** دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{2 - [x]}$ برابر است با: $([x])$ نماد جزء صحیح است

(۴) $(-\infty, 2]$

(۳) $(-\infty, 2)$

(۲) $(-\infty, 3]$

(۱) $(-\infty, 3)$

👉 پاسخ: گزینه «۱» برای به دست آوردن دامنه‌ی تابع داده شده باید تابع زیر رادیکال را بزرگتر و مساوی صفر قرار دهیم، لذا داریم:

$$2 - [x] \geq 0 \Rightarrow [x] \leq 2 \Rightarrow x < 3 \Rightarrow D_y = (-\infty, 3)$$

■ این سؤال روش تستی و سریع دارد که در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی (۱) و (۲) بدون دخالت دست! (روش رد گزینه‌ها)» آن را حل کرده‌ایم.

📌 **مثال ۸۲:** دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{\frac{1-|x|}{1+|x|}}$ کدام مجموعه است؟

(۴) $[-1, 1]$

(۳) $[1, +\infty)$

(۲) $(-\infty, 1]$

(۱) $\mathbb{R}$

👉 پاسخ: گزینه «۴» عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد، اما چون در کسر زیر رادیکال، مخرج کسر همواره مثبت است، لذا کافی است صورت کسر را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم. پس داریم:

$$1 - |x| \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_f = [-1, 1]$$

(MBA - سراسری ۸۹)

📌 **مثال ۸۳:** دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{[x] - |x|}$ کدام است؟ $([x])$ نماد جزء صحیح است

(۴) $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

(۳) $\mathbb{N} \cup \{0\}$

(۲) $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$

(۱) $\mathbb{Z}$

👉 پاسخ: گزینه «۳» با توجه به دو خاصیت جزء صحیح و قدرمطلق، یعنی $[x] \leq x$ و $|x| \leq x$ ، می‌توان نتیجه گرفت $[x] \leq x \leq |x|$ ، بنابراین عبارت زیر رادیکال در تابع داده شده همواره کوچکتر مساوی صفر می‌باشد و برای این‌که تابع f تعریف شده باشد، لازم است $|x| = [x]$ باشد. با توجه به این‌که در سمت چپ این معادله جزء صحیح وجود دارد پس عبارت سمت راست یعنی $|x|$ نیز باید صحیح باشد و در نتیجه، x باید عددی صحیح باشد و چون در همین معادله سمت راست نامنفی می‌باشد پس لازم است $[x]$ نیز نامنفی باشد و بنابراین x نیز باید نامنفی باشد. از بحث فوق نتیجه می‌شود، x عددی صحیح و نامنفی است. یعنی دامنه‌ی تابع f ، مجموعه‌ی $\mathbb{N} \cup \{0\}$ است.

■ این سؤال روش تستی و سریع دارد که در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی (۱) و (۲) بدون دخالت دست! (روش رد گزینه‌ها)» آن را حل کرده‌ایم.

(MBA - سراسری ۸۴)

❏ مثال ۸۴: دامنه‌ی تابع $f(x) = \text{tgh}^{-1}(\text{tg}\pi x)$ به صورت اجتماع کدام بازه‌هاست؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۴) $[k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4}]$

(۳) $[k + \frac{1}{4}, k + \frac{3}{4}]$

(۲) $(k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4})$

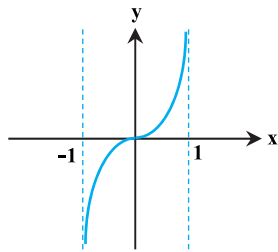
(۱) $(k + \frac{1}{4}, k + \frac{3}{4})$

❏ پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم دامنه‌ی تابع $f(x) = \text{tgh}^{-1} x$ به صورت $-1 < x < 1$ می‌باشد، پس

باید $-1 < \text{tg}\pi x < 1$ باشد و نیز می‌دانیم $\text{tg}(k\pi + \frac{\pi}{4}) = 1$ و $\text{tg}(k\pi - \frac{\pi}{4}) = -1$ است. لذا داریم:

$$\begin{aligned} \text{tg}(k\pi - \frac{\pi}{4}) < \text{tg}\pi x < \text{tg}(k\pi + \frac{\pi}{4}) &\Rightarrow k\pi - \frac{\pi}{4} < \pi x < k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow k - \frac{1}{4} < x < k + \frac{1}{4} &\Rightarrow x \in (k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4}) \end{aligned}$$

توجه: نمودار تابع $\text{tgh}^{-1} x$ به صورت روبرو است:



۴- دامنه توابع لگاریتمی $y = \log_{k(x)} g(x)$: در این گونه توابع عبارتی که از آن لگاریتم گرفته می‌شود، باید بزرگتر از صفر باشد، ضمناً مبنای لگاریتم نیز باید مثبت و مخالف یک باشد.

$$D_f = \{x \mid g(x) > 0, k(x) > 0, k(x) \neq 1\}$$

برای بررسی کامل‌تر، دامنه‌ی توابع لگاریتمی ابتدا باید نامساوی‌های لگاریتمی را بیان کنیم.

نامساوی‌های لگاریتمی

نامساوی $\log_a N \geq 0$ و $\log_a N \leq 0$ را در نظر بگیرید. برای بحث در مورد این نامساوی به دو حالت زیر توجه کنید:

$$\begin{cases} N \geq 1 & \Leftrightarrow \log_a N \leq 0 \\ 0 < N \leq 1 & \Leftrightarrow \log_a N \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{اگر } a > 1 \text{ باشد، آن گاه:} \\ \text{اگر } 0 < a < 1 \text{ باشد، آن گاه:} \end{cases}$$

❏ مثال ۸۵: حوزه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{\log(\frac{\Delta x - x^2}{4})}$ کدام است؟

(۴) $1 \leq x \leq 4$

(۳) $x \leq -1$

(۲) $x \geq 4$ و $x \leq 1$

(۱) $x \geq 4$

❏ پاسخ: گزینه «۴»

روش اول: عبارت داخل لگاریتم باید مثبت باشد، همچنین خود لگاریتم چون زیر رادیکال می‌باشد، باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد، پس داریم:

$$\begin{cases} \frac{\Delta x - x^2}{4} > 0 \Rightarrow \Delta x - x^2 > 0 \\ \log \frac{\Delta x - x^2}{4} \geq 0 \Rightarrow \frac{\Delta x - x^2}{4} \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \Delta x - x^2 \geq 4 \Rightarrow x^2 - \Delta x + 4 \leq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1 \leq x \leq 4$$

تذکر: در اکثر تست‌های مربوط به تعیین دامنه‌ی توابع، می‌توان از روش سریع عددگذاری در ضابطه‌ی تابع استفاده کرد.

روش دوم: اگر $x = 5$ را در نظر بگیریم، آن گاه $f(5) = \sqrt{\log 0}$ می‌شود و می‌دانیم که $\log(0)$ وجود ندارد و به ازای $x = -1$ نیز $f(-1) = \sqrt{\log(-1)}$ و مانند حالت قبل $\log(-1)$ نیز وجود ندارد.

توجه شود که حالت (۱) گزینه ۱ و ۲ و حالت (۲) گزینه ۳ را از مجموعه جواب‌ها خارج می‌کند، این روش با کمی تمرین و دقت، روش سریعی در تعیین دامنه‌ی توابع می‌باشد.

❏ مثال ۸۶: دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(9 - x^2)}$ کدام است؟

(۴) $(-3, -2\sqrt{2}) \cup [2\sqrt{2}, 3)$

(۳) $[-3, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, 3)$

(۲) $(-3, -2\sqrt{2})$

(۱) $[2\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

❏ پاسخ: گزینه «۴» به راحتی داریم:

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} 9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow 0 < 9 - x^2 \leq 1 \Rightarrow x^2 \geq 8 \Rightarrow x \geq 2\sqrt{2} \text{ یا } x \leq -2\sqrt{2} \\ 9 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 9 \Rightarrow -3 < x < 3 \end{cases} \quad (1) \quad \xrightarrow{(2), (1)} D_f = (-3, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, 3) \quad (2)$$